1.4 ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Το ομοιόθετο ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ

Είναι ευθύγραμμο τμήμα Α΄Β΄// ΑΒ και τέτοιο ώστε Α΄Β΄= λΑΒ , όπου λ ο λόγος ομοιοθεσίας (το κέντρο ομοιοθεσίας να μην ανήκει στν ευθεία ΑΒ)

2.

Το ομοιόθετο γωνίας : Είναι γωνία ίση με την αρχική

3.

Το ομοιόθετο πολυγώνου

- Όταν $\lambda > 1$, το ομοιόθετο είναι μεγέθυνση
- Όταν $0 < \lambda < 1$, το ομοιόθετο είναι σμίκρυνση
- Όταν $\lambda = 1$, το ομοιόθετο είναι ίσο με το αρχικό
- Τα ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες

4.

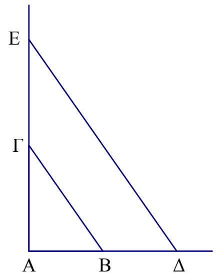
Το ομοιόθετο του κύκλου (Ο , ρ) : Είναι κύκλος με κέντρο το ομοιόθετο του Ο και ακτίνα ρ΄ = λ ρ όπου λ ο λόγος της ομοιοθεσίας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε το ομοιόθετο ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με κέντρο ομοιοθεσίας την κορυφή Α της ορθής γωνίας και λόγο λ = 2 .
Να γράψετε την αναλογία των ομολόγων πλευρών των δύο τριγώνων

Προτεινόμενη λύση



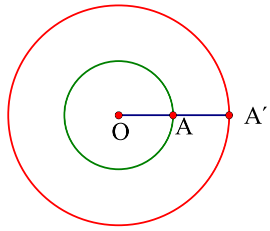
Το ομοιόθετο του Α είναι το Α
Στην ημιευθεία ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε
ΑΔ = 2ΑΒ και ομοίως στην ΑΓ σημείο Ε έτσι ώστε
ΑΕ = 2ΑΓ
Τότε το ΑΔΕ είναι το ομοιόθετο του ΑΒΓ

Η αναλογία : $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ} = 2$

2.

Να βρείτε το ομοιόθετο του κύκλου (Ο , ρ) στην ομοιοθεσία με κέντρο το Ο και λόγο λ = 2. Ποιος είναι ο λόγος των εμβαδών και ο λόγος των μηκών του αρχικού κύκλου προς τον ομοιόθετο του ;

Προτεινόμενη λύση



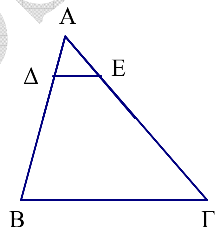
Στην προέκταση μιας ακτίνας ΟΑ θεωρούμε σημείο Α΄ έτσι ώστε ΟΑ΄= 2ΟΑ = 2ρ .
Ο κύκλος (Ο, ΟΑ΄) = (Ο , 2ρ) είναι το ζητούμενο ομοιόθετο.
Το εμβαδόν Ε και το μήκος L του κύκλου (Ο , ρ) είναι
$E = \pi\rho^2$ και $L = 2\pi\rho$
και του κύκλου (Ο , 2ρ) είναι $E' = \pi(2\rho)^2 = 4\pi\rho^2$ και $L' = 2\pi(2\rho) = 4\pi\rho$

Επομένως $\frac{E}{E'} = \frac{\pi\rho^2}{4\pi\rho^2} = \frac{1}{4}$ και $\frac{L}{L'} = \frac{2\pi\rho}{4\pi\rho} = \frac{1}{2}$

3 .

Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $ΑΔ = \frac{1}{4}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{4}ΑΓ$. Να εξηγήσετε γιατί ΔΕ // ΒΓ και γιατί $ΔΕ = \frac{1}{4}ΒΓ$

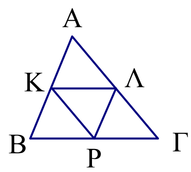
Προτεινόμενη λύση



Το σχήμα του προβλήματος φαίνεται δίπλα
Αφού $ΑΔ = \frac{1}{4}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{4}ΑΓ$,
τα Δ και Ε είναι τα ομοιόθετα των σημείων Β και Γ αντίστοιχα στην ομοιοθεσία με κέντρο το Α και λόγο $\lambda = \frac{1}{4}$. Άρα το τμήμα ΔΕ είναι το ομοιόθετο του ΒΓ οπότε ισχύει ότι
ΔΕ // ΒΓ και $ΔΕ = \frac{1}{4}ΒΓ$

4.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα Κ, Λ , Ρ είναι μέσα των ΑΒ , ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Συμπληρώστε τον πίνακα



Ευθύγραμμο τμήμα	Κέντρο ομοιοθεσίας	Λόγος Ομοιοθεσίας	Ομοιόθετο
ΚΛ	Α	2	ΒΓ
ΑΓ	Β	$\frac{1}{2}$	ΚΡ
ΓΡ	Γ	2	ΓΒ

Προτεινόμενη λύση

Επειδή ΑΒ = 2 ΑΚ και ΑΓ = 2ΑΛ, τα Β και Γ είναι ομοιόθετα των Κ και Λ στην ομοιοθεσία με κέντρο το Α και λόγο λ =2.
Οπότε και το ΒΓ είναι το ομοιόθετο του ΚΛ

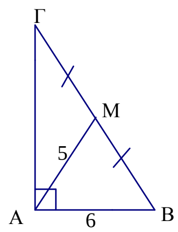
Επειδή ΒΚ = $\frac{1}{2}$ ΒΑ και ΒΡ = $\frac{1}{2}$ΒΓ, τα Κ και Ρ είναι ομοιόθετα των Α και Γ στην ομοιοθεσία με κέντρο το Β και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.

Οπότε και το ΚΡ είναι το ομοιόθετο του ΑΓ
Αφού ΓΒ = 2ΓΡ, το ΓΒ είναι το ομοιόθετο του ΓΡ στην ομοιοθεσία με κέντρο το Γ και λόγο λ = 2
Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παραπάνω

5.

Να βρείτε το ομοιόθετο του διπλανού ορθογωνίου τριγώνου στην ομοιοθεσία με κέντρο το Β και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.

Να υπολογίσετε τις πλευρές του νέου τριγώνου



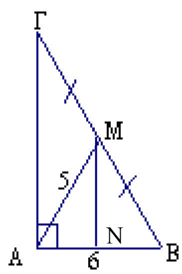
Προτεινόμενη λύση

Αφού Μ είναι το μέσο της ΒΓ, είναι ΒΜ=$\frac{1}{2}$ΒΓ

Οπότε το Μ είναι το ομοιόθετο του Γ στην παραπάνω ομοιοθεσία .

Αν Ν είναι το μέσο του ΒΑ, τότε ΒΝ = $\frac{1}{2}$ΒΑ

και συνεπώς το Ν είναι το ομοιόθετο του Α στην ίδια ομοιοθεσία .



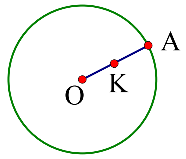
Το τρίγωνο ΒΜΝ είναι το ζητούμενο

Οι πλευρές του νέου τριγώνου είναι το $\frac{1}{2}$ των πλευρών του αρχικού .

Ξέρουμε ότι ΒΓ = 2ΑΜ, άρα ΒΓ = 10
Από το Πυθαγόρειο στο ΑΒΓ εύκολα βρίσκουμε ότι ΑΓ = 8.
Συνεπώς οι πλευρές του νέου τριγώνου είναι ΒΜ = 5 , ΒΝ = 3 και ΜΝ = 4

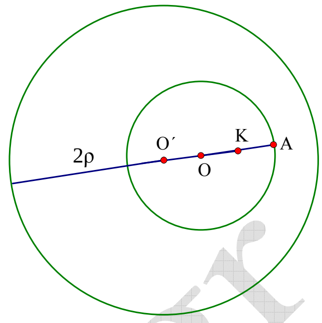
6.

Να βρείτε το ομοιόθετο του κύκλου (Ο, ρ) στην ομοιοθέσία με κέντρο το μέσο Κ της ακτίνας ΟΑ και λόγο λ = 2



Προτεινόμενη λύση

Στην ημιευθεία ΚΟ παίρνουμε σημείο Ο΄ τέτοιο ώστε ΚΟ΄= 2ΚΟ. Ο κύκλος (Ο΄ , 2ρ) είναι ο ζητούμενος



7 .

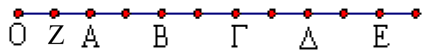
Στο διπλανό σχήμα και σε ομοιοθεσία με κέντρο το Ο και λόγο λ να βρείτε

α) το ομοιόθετο του Α όταν λ = 3

β) το ομοιόθετο του Β όταν λ = $\frac{1}{2}$

γ) το ομοιόθετο του Γ όταν λ = $\frac{1}{6}$

δ) το ομοιόθετο του Ε όταν λ = $\frac{4}{5}$



Προτεινόμενη λύση

α) Επειδή ΟΓ = 3ΟΑ το ζητούμενο σημείο είναι το Γ

β) $ΟΑ = \frac{1}{2}ΟΒ$ το ζητούμενο σημείο είναι το Α

γ) $ΟΖ = \frac{1}{6}ΟΓ$ το ζητούμενο σημείο είναι το Ζ

δ) $ΟΔ = \frac{4}{5}ΟΕ$ το ζητούμενο σημείο είναι το Δ

8.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Το ομοιόθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι πάντα τμήμα παράλληλο στο ΑΒ

β) Το ομοιόθετο της γωνίας $\omega = 25^o$ στην ομοιοθεσία με λόγο 2 είναι γωνία $\omega' = 50^o$

γ) Το ομοιόθετο τετραγώνου δεν είναι πάντα τετράγωνο

δ) Αν ο κύκλος (Ο΄, ρ΄) είναι ομοιόθετος του (Ο, ρ) με λόγο λ, τότε ο λόγος του μήκους του (Ο΄, ρ΄) προς το μήκος του (Ο, ρ) είναι ίσος με λ .

Προτεινόμενη λύση

α) Όχι διότι αν το κέντρο ομοιοθεσίας είναι πάνω στον φορέα του τμήματος τότε το ομοιόθετο είναι στον ίδιο φορέα . Άρα πρόταση Λ

β) Όχι διότι το ομοιόθετο γωνίας είναι γωνία ίση με την δοθείσα. Άρα πρόταση Λ

γ) Όχι διότι το ομοιόθετο πολυγώνου είναι σμίκρυνση ή μεγέθυνση ή το ίδιο το πολύγωνο με το δοθέν. Άρα πρόταση Λ

δ) Ναι διότι $\frac{L'}{L} = \frac{2\pi(\lambda\rho)}{2\pi\rho} = \lambda$. Άρα πρόταση Σ